数理解析研究所講究録
191巻 1973年 52-59

Generalized tangent の carrier と Lipschitz の不等式について

信大 理　浅田 明

§1. 曲線の generalized tangent

n 変数関数 f が, a で, $\|y\|=1$ となる任意の y について, ($t>0$ からの) 極限

$$Df(a,y)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{f(a+ty)-f(a)\}$$

を持ち, $Df(a,y)$ が y の関数として, S^{n-1} の連続関数になる時 f を (右側) Gâteaux 微分可能と呼ぶ ([3], [4])

$\gamma=\gamma(t)$ が, a から出発する R^n の曲線で

(1)　　$\gamma(t)\neq a,\quad t\neq 0.\qquad \|\gamma(t)-a\|=O(t),$

となる時, f が a で Gâteaux 微分可能であれば

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\lim_{h\to 0}\int_h^s\frac{f(\gamma(t))-f(a)}{t}dt=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\lim_{h\to 0}\int_h^s Df\Big(a,\frac{\gamma(t)-a}{\|\gamma(t)-a\|}\Big)\|\gamma(t)-a\|dt$$

だから, (1) の2番目の仮定から, $\|Df(a,y)\|=\max_{y\in S^{n-1}}|Df(a,y)|$ と置く時, $\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\lim_{h\to 0}\int_h^s(f(\gamma(t))-f(a))/t\cdot dt$ が存在すれば, 適当な正数 C が存在して (例えば $C=\overline{\lim_{t\to 0}}\|\gamma(t)-a\|/t$ とすればよい)

(2) $$\left|\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\lim_{u\to 0}\int_u^s \frac{f(\gamma(t))-f(a)}{t}\,dt\right| \leqq C\,\|Df(a,y)\|$$

となる．従ってRieszの定理から，aでGâteaux微分可能な総てのfについて極限 $\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\lim_{u\to 0}\int_u^s \frac{f(\gamma(t))-f(a)}{t}dt$ が存在すれば S^{n-1} の測度 ξ が存在して

(3) $$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\lim_{u\to 0}\int_u^s \frac{f(\gamma(t))-f(a)}{t}\,dt = \int_{S^{n-1}} Df(a,y)\,d\xi$$

となる．

定義．(3)によって定まる ξ を，γ の a での(右側) generalized tangent と呼び $\mathcal{T}^+\gamma(a)$ と書く([1], [2])．

例1．γ が $t=a$ で(右側)微分可能なら $\mathcal{T}^+\gamma(a)=c\delta_y$, c は正の定数，δ_y は $y(\in S^{n-1})$ でのDirac測度，である．

例2．γ が R^2 で $r\theta=1$ で与えられるなら γ は原点でgeneralized tangentを持ち，$\gamma(t)=(t\cos(\frac{1}{t}), t\sin(\frac{1}{t}))$ と表示した時 $\mathcal{T}^+\gamma(0)=\frac{d\theta}{2\pi}$, S^1 上のstandard measure, となる．

例3．γ が R^2 で $t\sin\frac{1}{t}, t>0$ のgraphの時 S^1 ($0\leqq\theta<2\pi$ で表示)の連続関数 g に対し

$$\begin{aligned}
&\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\lim_{u\to 0}\int_u^s g\left(\tan^{-1}\left(\sin\tfrac{1}{t}\right)\right)\sqrt{1+\sin^2\left(\tfrac{1}{t}\right)}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin^2 v}\; g\left(\tan^{-1}(\sin v)\right)dv \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} g(\theta)\left(1/\cos^2\theta\sqrt{\cos 2\theta}\right)d\theta
\end{aligned}$$

となるから γ は原点でgeneralized tangentを持ち，car. $\mathcal{T}^+\gamma(0)=[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$,

且そこで $\mathfrak{X}^+\gamma(c) = \frac{1}{\pi}\frac{d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{\cos 2\theta}}$ となる.

§2. 関数の generalized derivation.

1変数関数 $x(t)$ の graph が generalized tangent を持つ條件を求める.

γ が $x(t)$ の $t=a$ から出発する graph なら $\gamma(t)=(a+t, x(a+t))$ だから ($t \geqq 0$),

$$(4) \qquad \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\lim_{h\to 0}\int_h^s \frac{f(\gamma(t))-f(a)}{t}\,dt$$

$$= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\lim_{h\to 0}\int_h^s Df\left(a, \tan^{-1}\left(\frac{x(a+t)-x(a)}{t}\right)\right)\frac{\sqrt{t^2+(x(a+t)-x(a))^2}}{t}\,dt$$

となる. 従ってこの時

$$\operatorname{car.}\mathfrak{X}^+\gamma(a) \subset [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

であり, 又 $g(\theta)$ が S^1 の連続関数なら $g(\tan^{-1}t)$ は R^1 の連続関数で $\lim_{t\to\pm\infty} g(\tan^{-1}t)$ は共に存在するから

定理1. 1変数関数 $x(t)$ の graph が $t=a$ で generalized tangent を持つ爲には, 極限

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\lim_{h\to 0}\int_h^s g\left((x(a+t)-x(a))/t\right)dt$$

が, R^1 の, $\lim_{t\to\pm\infty} g(t)/\sqrt{1+t^2}$ が共に存在する様な, すべての連続関数に対して存在する事が必要十分である.

定義. $\mathfrak{F}(R^1)$ を $L^1_{loc}(R^1)$ に含まれ, 位相が $L^1_{loc}(R^1)$ より弱くない

R^1 上の関数空間とする．すべての $f\in\mathcal{F}(R^1)$ に対し，極限

$$\lim_{s\to0}\frac{1}{s}\lim_{h\to0}\int_h^s f\left(\frac{x(a+t)-x(a)}{t}\right)dt$$

が存在する時

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F}(R^1)}^{+}x(a)(f)=\lim_{s\to0}\frac{1}{s}\lim_{h\to0}\int_h^s f\left(\frac{x(a+t)-x(a)}{t}\right)dt \tag{5}$$

によって決まる $\mathcal{F}(R^1)^*$ ($\mathcal{F}(R^1)$ の dual space) の元 $\mathcal{D}_{\mathcal{F}(R^1)}^{+}x(a)$ を，x の a での(右側) $\mathcal{F}(R^1)$-derivative 又は generalized derivative と呼ぶ．

例1．$\mathcal{F}(R^1)=R\cdot\{t\}$，関数 $t: t(t)=t$，から生成された一次元空間，とする時

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F}(R^1)}^{+}x(a)(ct)=c\left(\lim_{s\to0}\frac{1}{s}\lim_{h\to0}\int_h^s \frac{x(a+t)-x(a)}{t}dt\right)$$

なので，$\mathcal{D}_{\mathcal{F}(R^1)}^{+}x(a)$ は(右側) Borel derivate $B_r x(a)$ と思って良い([6])．

例2．$\mathcal{F}(R^1)=\{f \mid f$ は連続，且 $\lim_{t\to\pm\infty}f(t)$ が共に存在する$\}$，とする．この時 δ_∞: $\delta_\infty(f)=\lim_{t\to\infty}f(t)$，$\delta_{-\infty}$: $\delta_{-\infty}(f)=\lim_{t\to-\infty}f(t)$，は共に $\mathcal{F}(R^1)^*$ の元になるが $x(t)$ が Weierstrass の例，$x(t)=\sum_n b^n\cos(c^n\pi t)$，$c$ は奇数，$0<b<1$，$bc>1+\frac{3}{2}\pi$，の時

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F}(R^1)}^{+}x(a)=\delta_{-\infty},\quad a=\frac{m}{c^k},\quad m,k \text{ は整数},$$

となる．尚同じ a について左側 generalized derivative は δ_∞ になる．

この例で他の点でどうなるか，又他の例，例えば Riemann の例ではどうなるかといった計算はかなりむつかしい様である．

定理2．$\mathcal{F}(R^1)$ が $C(R^1)$ で dense，且 f_a を $f_a(t)=f(a+t)$ とする時，

$f\in\mathfrak{F}(R')$ なら $f_a\in\mathfrak{F}(R')$ となるとする. この時

(i) $d_{\mathfrak{F}(R')}^{+}x(a)$ は $R'\cup\{\pm\infty\}$, R' の2点 $\pm\infty$ による compact 化, 上の確率分布である.

(ii) $d_{\mathfrak{F}(R')}^{+}x_1(a)$, $d_{\mathfrak{F}(R')}^{+}x_2(a)$ が共に存在すれば $*$ を convolution として

$$d_{\mathfrak{F}(R')}^{+}(x_1+x_2)(a) = d_{\mathfrak{F}(R')}^{+}x_1(a) * d_{\mathfrak{F}(R')}^{+}x_2(a)$$

(iii) $d_{\mathfrak{F}(R')}^{+}x(a)$ が確率分布として平均を持てば, $\mathfrak{F}$ を Fourier 変換とし $\mathfrak{F}(d_{\mathfrak{F}(R')}^{+}x(a)) > 0$ の時

$$\lim_{c\to 0}\frac{1}{c}\left(\frac{-1}{2\pi i}\log\left(\mathfrak{F}\left(d_{\mathfrak{F}(R')}^{+}(cx)(a)\right)\right)\right) = B_r x(a)\, t,$$

但し $B_r x(a)$ は x の a での右側 Borel 微分である.

§3. $\mathfrak{F}(R')$-derivative の carrier と Lipschitz の不等式

以上 $\mathfrak{F}(R')$ は $C(R')$ の dense な部分空間になっているとする. 定義から

定理3. x が a の右側で Lipschitz 条件

(6) $$L \leqq \frac{x(a+t)-x(a)}{t} \leqq K, \quad 0<t<\varepsilon,$$

をある $\varepsilon>0$ について満たし, a で $\mathfrak{F}(R')$-derivative を持てば

(7) $$\mathrm{car}\; d_{\mathfrak{F}(R')}^{+}x(a) \subset [L, K]$$

系. x の a での右側 Dini derivative を $d_a^{+}x$, $D_a^{+}x$ とすれば

(7)′ $$\mathrm{car}\; d_{\mathfrak{F}(R')}^{+}x(a) \subset [d_a^{+}x,\ D_a^{+}x].$$

しかしこの逆は一般に成立しない(簡単に反例が作れる).

car. $d_{\mathfrak{F}(R')}^{+}x(a)$ を含む最短の区間を決定する為次の lemma を使う.

Lemma　両側の特性関数が常に $\mathcal{K}(R^1)$ の元により近似可能で、$\mathfrak{J}_{\mathcal{K}(R^1)}{}^{+}x(a)$ が存在すれば、(7) が成り立つ時任意の $\varepsilon>0$ に対して（m を Lebesgue measure として）

$$\lim_{\delta\to0} m\left(\left\{t \,\middle|\, \frac{x(a+t)-x(a)}{t} \leqq K+\varepsilon\right\}\cap(0,\delta]\right)/\delta = 1,$$

$$\lim_{\delta\to0} m\left(\left\{t \,\middle|\, \frac{x(a+t)-x(a)}{t} \leqq L-\varepsilon\right\}\cap(0,\delta]\right)/\delta = 0,$$

となる.

この lemma から $\mathfrak{J}_{\mathcal{K}(R^1)}{}^{+}x(a)$ が存在する時関数 $\chi^{+}_{x(a)}(u)$ を

$$\chi^{+}_{x(a)}(u) = \inf_{u'>u}\left(\lim_{\delta\to0} m\left(\left\{t \,\middle|\, \frac{x(a+t)-x(a)}{t} \leqq u'\right\}\cap(0,\delta]\right)/\delta\right),$$

で定義出来且（$\chi^{+}_{x(a)}$ は単調増加だから $\chi^{+}_{x(a)}$ に関する Lebesgue-Stieltjes 積分が定義出来）

(8)　$$\mathfrak{J}_{\mathcal{K}(R^1)}{}^{+}x(a)(f) = \int_{R^1} f(u)\, d\chi^{+}_{x(a)}(u)$$

となる事が解るが、(8) から

(9)　$$AD_a^{+}x = \inf_u\{u \mid \chi^{+}_{x(a)}(u)=1\},\quad Ad_a^{+}x = \sup_u\{u \mid \chi^{+}_{x(a)}(u)=0\},$$

と置けば

定理4.　$AD_a^{+}x$, $Ad_a^{+}x$ は不等式

(10)　$$d_a^{+}x \leqq Ad_a^{+}x \leqq AD_a^{+}x \leqq D_a^{+}x$$

を満たし、且

(11)　$$\mathrm{car.}\ \mathfrak{J}_{\mathcal{K}(R^1)}{}^{+}x(a) \subset [Ad_a^{+}x,\ AD_a^{+}x],$$

又 (7) が成立すれば常に $L \leqq Ad_a^{+}x$, $K \geqq AD_a^{+}x$ である.

尚 (9) は

(9)′　$$\inf_u\left\{u \,\middle|\, \lim_{\delta\to0} m\left(\left\{t \,\middle|\, \frac{x(a+t)-x(a)}{t} \leqq u\right\}\cap(0,\delta]\right)/\delta = 1\right\},$$

$$\sup_u \{u \mid \lim_{\varepsilon\to 0} m(\{t \mid \tfrac{x(a+t)-x(a)}{t} \le u\} \cap (0,\delta])/\delta = c\},$$

となるなら, car $\mathcal{J}_{\overline{\mathcal{F}}(R^1)}{}^{+}x(a)$ が compact になる為には, x が a で, Lévy の意味で(右側) Lipschitz 連続になる事が, 必要十分である([5]).

定理5. $\mathcal{J}_{\overline{\mathcal{F}}(R^1)}{}^{+}x(a)=\delta_c$ (c での Dirac measure) となる為の必要十分な條件は、x が a で(右側)擬微分可能で $AD^{+}x(a)=c$ となる事である.

証明、必要性は定理4から任意の $\varepsilon>0$ に対し

(12) $$\lim_{\delta\to 0} m(\{t \mid c-\varepsilon \le \tfrac{x(a+t)-x(a)}{t} \le c+\varepsilon\} \cap (0,\delta])/\delta = 1$$

となる事から解る. 逆に(12)が成立すれば連続な f に対し

$$\left|\lim_{h\to 0}\int_h^s f\left(\frac{x(a+t)-x(a)}{t}\right)dt - f(c)s\right|$$
$$\le \left(\max_{c-\varepsilon\le x,y\le c+\varepsilon}|f(x)-f(y)|\right)s + o(s)$$

が任意の $\varepsilon>0$ に対し成立するから十分な事が出る.

文献

[1]. Asada, A.: Generalized tangents of curves and generalized vector fields, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 6 (1971). 45－75.

[2]. Asada, A.: Generalized integral curves of generalized vector fields, J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 7 (1972), 59－118.

[2]′ Asada, A.: Generalized vector field and its local integration,

Proc. Japan Acad. 49 (1973), 73 – 76.

[3]. Gâteaux, R.: Fonctions d'une infinité des variables indépendentes, Bull. Soc. Math. France, 50 (1919), 70 – 96.

[4] Hille, E - Phillips, R. S.: Functional analysis and semi-groups, Providence, 1957.

[5]. Lévy, P.: Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, 1937.

[6]. Marcinkiewicz, J. - Zygmund, A.: On the differentiability of functions and summability of trigonometrical series, Fund. Math. 26 (1936), 1 – 43.